Problema inici de curs - Càlcul

Adrià Vilanova Martínez

Enunciat: Considerem una funció f tal que

$$f(-x) = 2 - f(x)$$

i també la funció

$$g(x) = \frac{x+1}{x}$$

Siguin $x_1, ..., x_m$ els valors que satisfan $f(x) = g(x)$. Determineu

$$(x_1 + g(x_1)) + ... + (x_m + g(x_m))$$

Començarem observant que si substituïm a l'equació funcional $x = 0$, obtenim

$$f(0) = 2 - f(0)$$
$$f(0) + f(0) = 2$$
$$2f(0) = 2$$
$$f(0) = 1$$

Reescribint l'equació funcional com a $f(x) + f(-x) = 2$, junt amb la observació anterior podem intuir que la funció f podria ser simètrica respecte al punt $(0, 1)$.

Tot seguit farem un estudi de la funció g. Per començar, el seu domini és $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

La part interessant és quan veiem les possibles assímptotes de la funció g. Primer calculem uns límits per descobrir una possible assímptota vertical a $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \left[\frac{1}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} g(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Dels darrers càlculs dels límits quan x tendeix a 0 es dedueix que hi ha una assímptota vertical a $x = 0$. Després calculem límits quan x tendeix a infinit i a menys inifinit:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$$

Per tant, hi ha una assímptota horitzontal $y = 1$.

Que hi hagi una assímptota vertical $x = 0$ i una assímptota horitzontal $y = 1$ ens fa arribar a intuir que g podria ser també simètrica respecte el punt $(0, 1)$.

Llavors, ens plantegem demostrar que si $\exists x_i \mid f(x_i) = g(xi) \implies f(-x_i) = g(-x_i)$

Però abans de demostrar-ho haurem de demostrar una altra proposició per ajudar-nos a demostrar el primer:

Proposició: $g(-x) = 2 - g(x) \forall x \neq 0$

Segons l'enunciat, $g(x) = \frac{x+1}{x}$, i llavors també podem donar per cert que $g(-x) = \frac{-x+1}{-x} = \frac{x-1}{x}$.

Llavors, $2 - g(x) = 2 - \frac{x+1}{x} = \frac{2x-x-1}{x} = \frac{x-1}{x} = g(x)$. Queda demostrat que $g(-x) = 2 - g(x) \forall x \neq 0$. $\square$

Demostració: Suposant $f(x_i) = g(x_i)$, i considerant l'anterior proposició, podem afirmar que

$$g(-x_i) = 2 - g(x_i) \implies g(-x_i) = 2 - f(x_i)$$

Com també sabem, segons l'anunciat, que $f(-x) = 2 - f(x)$, tenim que

$$\begin{cases} g(-x_i) = 2 - f(x_i) \\ f(-x_i) = 2 - f(x_i) \end{cases} \implies \begin{cases} f(x_i) = 2 - g(-x_i) \\ f(x_i) = 2 - f(-x_i) \end{cases}$$

Igualant $f(x_i)$, tenim

$$2 - g(-x_i) = 2 - f(-x_i) \implies f(-x_i) = g(-x_i)$$

És a dir, hem arribat a demostrar la tesi. $\square$

Per tant, sabem que hi ha parelles $(x_i, -x_i)$ que compleixen $f(x_i) = g(x_i)$ i $f(-x_i) = g(-x_i)$, on $x_i \neq 0$. De totes maneres, a $x = 0$ no es pot donar intersecció entre f i g, ja que $g(0)$ és indeterminat.

Per tant, com les interseccions entre f i g van en parelles, podríem redefinir el conjunt $A = \{x_1, ..., x_m\}$ com $B = \{x_1, -x_1, x_2, -x_2, ..., x_n, -x_n\}$, on n és el nombre de parelles.

Així doncs, $S = (x_1 + g(x_1)) + ... + (x_m + g(x_m))$ en termes del conjunt B seria $S = (x_1 + g(x_1)) + (-x_1 + g(-x_1)) + ... + (x_n + g(x_n)) + (-x_n + g(-x_n)) = g(x_1) + g(-x_1) + ... + g(x_n) + g(-x_n)$

Com $g(x) + g(-x) = 2$ segons la proposició anterior, llavors $S = 2n$. És a dir, S és el nombre de vegades que f interseca amb g.