Problemes entregables de Càlcul - Derivació

Adrià Vilanova Martínez

3 de desembre de 2017

Prob. 4.16. Es diu que a és una *arrel de multiplicitat K* del polinomi p si $p(x) = (x-a)^k q(x)$, on q és un altre polinomi tal que $q(\alpha) \neq 0$.

1) Demostreu que si $\alpha_1 < \alpha_2$ són dues arrels de p, aleshores existeix $\beta \in (\alpha_1, \alpha_2)$ tal que $p'(\beta) = 0$.

Que α_1 i α_2 siguin dues arrels de p significa que $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$. A més a més, sabem que p és un polinomi, i és ben sabut que tots els polinomis són funcions contínues i derivables a tot el seu domini. Així doncs, segons el Teorema de Rolle, $\exists \beta \in (\alpha_1, \alpha_2) | f'(\beta) = 0$ $\square$

2) Demostreu que si totes les arrels de p són reals, aleshores totes les arrels de p' també són reals. Què podem dir de les multiplicitats?

Suposem que p té n arrels (comptant multiplicitats), totes elles reals. Pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra, això implica que el grau del polinomi és n. Al derivar p, obtenim un polinomi de grau $n-1$ que, una altra vegada pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra, té $n-1$ arrels. El que volem veure és que aquestes $n-1$ arrels són reals.

Hem vist que si α_1 i α_2 són arrels reals diferents de p, llavors existeix almenys una arrel real en l'interval (α_1, α_2). Si ordenem les k arrels diferents de p en ordre ascendent $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, podem assegurar que en cada un dels intervals $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \ldots, (\alpha_{k-1}, \alpha_k)$ hi ha almenys una arrel real. És a dir, que $\#\{x \in \bigcup_{i=1}^{k} (\alpha_{i-1}, \alpha_i) : p'(x) = 0\} \geq k-1$

En el cas que les multiplicitats de totes les arrels sigui 1, això equival a dir que $k = n$ (ja que totes les arrels són úniques), i per tant hi ha almenys $n-1$ arrels reals, que són les que estàvem buscant, i per tant es compleix la proposició.

En el cas que hi hagi alguna arrel amb multiplicitat major que 1, ens falta comprovar $n-k$ arrels més a part de les que hem vist en el paràgraf enterior. Ara veurem què implica el fet que hi hagi arrels amb multiplicitat major que 1.

Prenem α arrel de p de multiplicitat $n > 1$. Llavors podríem expressar p com $p(x) = (x-\alpha)^n \cdot q(x)$. Derivant p, obtenim

$$p'(x) = n \cdot (x-\alpha)^{n-1} \cdot q(x) + (x-\alpha)^n \cdot q'(x) = (x-\alpha)^{n-1} \cdot (n \cdot q(x) + q'(x)) \implies$$

$$\implies \alpha \text{ és arrel de } p'(x) \text{ amb multiplicitat } n-1$$

.

És a dir, podem deduir

$$[\alpha \text{ arrel de } p \text{ de multiplicitat } n > 1 \implies \alpha \text{ arrel de } p' \text{ de multiplicitat } n-1]$$

Si definim $r = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)$ com la suma de cada multiplicitat menys 1, aquest correspondrà al nombre d'arrels a p' que són iguals a les arrels de p (per l'enunciat de l'anterior paràgraf). Com aquestes reals també són arrels a p, per hipòtesi són nombres reals. Així doncs, tenim r arrels reals a p' que són diferents de les trobades anteriorment ja que no pertanyen a l'unió d'intervals descrita anteriorment (els intervals no incloien cap arrel de p).

Així doncs, obtenim que el nombre d'arrels reals a p' és com a mínim $k - 1 + r = k - 1 + \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = k - 1 + \sum_{i=1}^{k}(n_i) - k = \sum_{i=1}^{k}(n_i) - 1$. De fet, n és la suma de les multiplicitats de totes les arrels de p, que és justament $\sum_{i=1}^{k}(n_i)$. És a dir, que el nombre mínim d'arrels reals és justament $n - 1$. Com segons el Teorema Fonamental de l'Àlgebra ens diu que p' té $n - 1$ arrels, llavors hem demostrat que si totes les arrels de p són reals, llavors totes les arrels de p' són reals. □

Corol·lari. Sigui $p(x)$ un polinomi amb totes les arrels reals. Si prenem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} | p(\alpha_1) = p(\alpha_2) = 0 \wedge p(x) \neq 0 \forall x \in (\alpha_1, \alpha_2)$, això implica $\exists! \beta \in (\alpha_1, \alpha_2) | p'(\beta) = 0$

4.29. Un socorrista que corre 6 vegades més ràpid que no pas neda va depressa per ajudar a un nedador dins una gran piscina circular de radi R. Si considerem un sistema de coordenades amb origen el centre de la piscina, la posició del nedador és $(-R/3, 0)$, mentre que la del socorrista és $(R, 0)$. Quin camí ha de seguir el socorrista per arribar al nedador el més aviat possible?

Intuitivament, el que està clar és que el socorrista ha d'anar per la piscina per arribar al nedador, però abans pot caminar per la vora de la piscina (per la circumferència de radi R) per apropar-se. És a dir: primer de tot caminarà per la vora describint un arc de circumferència de la piscina i després anirà en línia recta fins al punt on està el nedador.

Observem que existeix un eix de simetria al sistema, que és l'eix d'abscisses. Així doncs, considerarem la trajectòria que comença caminant per la vora de la piscina en sentit antihorari, que en tot cas seria el mateix que fer-ho en sentit horari.

Ara construirem una funció que ens dóna el temps necessari en anar fins al nedador en funció de l'angle recorregut per fora de la piscina.

Per començar, la distància que recorre amb l'arc de circumferència és $s_c = R \cdot \theta$. Si la velocitat del socorrista caminant és de $6v_n$ (6 vegades la velocitat nedant), com $t_c = s_c/v_c$, tenim que el temps que triga en recorre l'arc caminant és

$$t_c = \frac{R\theta}{6v_n}$$

Quan hagi recorregut θ radians, el socorrista es trobarà al punt $P(R\cos\theta, R\sin\theta)$. La distància que ha de recòrrer fins al nedador és $s_n = d(P, (-R/3, 0)) =$

$\sqrt{(R\cos\theta+R/3)^2+(R\sin\theta)^2} = \sqrt{R^2\cos^2\theta+R^2/9+2/3R^2\cos\theta+R^2\sin^2\theta} =$
$\sqrt{R^2(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1}+1/9+2/3\cos\theta)} = R\sqrt{10/9+2/3\cos\theta}$

Així doncs, podem dir

$$t_n = \frac{R\sqrt{(\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\cos\theta)}}{v_n}$$

El temps total t que triga el socorrista depenent de l'angle θ escollit serà llavors la suma dels dos temps parcials anteriors:

$$t(\theta) = \frac{R}{v_n}\left(\frac{\theta}{6}+\sqrt{\left(\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\cos\theta\right)}\right)$$

Ara volem optimitzar aquesta funció, en particular per trobar el seu mínim. El domini de la funció és $\theta \in [0, \pi]$, ja que:

1. Descriure angles de $2\pi+\beta$ radiants és el mateix que descriure angles de β radiants, i de la primera manera es triga més temps innecessàriament (ja que s'arriba al mateix punt però fent una volta més).
2. Caminar $\pi+\beta$ radians en sentit antihorari $\forall\beta \in (0, \pi)$ és idèntic a caminar $-\pi-\beta = 2\pi-\pi-\beta = \pi-\beta$ en sentit horari, que per la simetria mencionada anteriorment és el mateix que caminar $\pi-\beta \in (0, \pi)$ en sentit antihorari. És a dir, que per arribar al mateix estat que quan describim un angle en l'interval $(\pi, 2\pi)$, podem descriure un angle en l'interval $(0, \pi)$ i trigarem menys. Per tant, el mínim estarà a l'interval $[0, \pi]$.

Com la funció és derivable en tot el seu domini, podem derivar-la i igualar-la a 0 per trobar possibles mínims:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{R}{3v_n}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\cos\theta}}\right) = 0 \implies \frac{1}{2}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\cos\theta}} = 0 \implies$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\cos\theta}} \implies \frac{1}{4} = \frac{\sin^2\theta}{\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\cos\theta} \implies \frac{1}{4} = \frac{1-\cos^2\theta}{\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\cos\theta} \implies$$

$$18\cos^2\theta+3\cos\theta-13 = 0 \implies \cos\theta = \frac{-1\pm\sqrt{105}}{12} \implies$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-1\pm\sqrt{105}}{12}\right) \implies \begin{cases} \theta_1 = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{105}}{12}\right) \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \theta_2 = \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{105}}{12}\right) \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

Sabem que

$$t(0) = \frac{4R}{3v_n}, t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R}{v_n}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{10}}{3}\right), t(\pi) = \frac{R}{v_n}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\right)$$

A més a més, podem veure que la segona derivada de la funció és

$$\frac{d^2t}{d\theta^2} = -\frac{3(20\cos(\theta) + 3\cos(2\theta) + 9)}{4\sqrt{2}(3cos(\theta) + 5)^{\frac{3}{2}}}$$

Si substituïm pels valors corresponents veiem que $\theta_1 < 0$ (és un màxim local) i $\theta_2 > 0$ (és un mínim local). A més a més θ_2 és el mínim absolut a l'interval $[0, \pi]$ perquè $t(\theta_2) < t(0)$ i $t(\theta_2) < t(\pi)$.

Així doncs, el socorrista ha de descriure un arc de circumferència de arccos $\left(\frac{-1-\sqrt{105}}{12}\right)$ radians (en sentit antihorari o bé en sentit horari) i després anar en línia recta fins al nedador.